Własności funkcji absolutnie ciągłych – teoria

Definicja. Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła ($f \in AC([a,b])$), jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $\sum_j |f(d_j) - f(c_j)| \leqslant \varepsilon$ dla każdej rozłącznej rodziny przedziałów $(c_j, d_j) \subseteq [a,b]$ o łącznej długości $\sum_j |d_j - c_j| \leqslant \delta$. *Uwaga*: można rozważać skończone lub przeliczalne rodziny przedziałów; nie ma to wpływu na definicję.

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $f \in L^1(a,b)$, to funkcja postaci

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

jest absolutnie ciągła na $[a,b]$.

Zadanie 2. Wykazać, że każda funkcja absolutnie ciągła (na skończonym przedziale) ma skończone wahanie.

Definicja. Funkcja f jest osobliwa, jeśli klasyczna pochodna f' istnieje p.w. i jest równa 0 na zbiorze pełnej miary.

Twierdzenie. Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła i osobliwa, to jest stała.

Zarys dowodu. Oznaczmy zbiór pełnej miary $E = \{f' = 0\}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ zgodnie z definicją absolutnej ciągłości. Sprawdzamy, że

$$\mathcal{F} = \left\{ [c,d] \subseteq U : \left| \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \right| < \varepsilon \right\}$$

jest pokryciem Vitaliego E i otrzymujemy $\mathcal{F}' = \{[c_j, d_j]\}$ jak w lemacie. Z definicji rodziny $\mathcal{F}$ mamy

$$\sum_j |f(d_j) - f(c_j)| \leqslant \varepsilon \sum (d_j - c_j) \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Rozważmy też rodzinę przedziałów $\mathcal{F}'' = \{[c_j', d_j']\}$ dopełniającą $\mathcal{F}'$ do podziału $[a,b]$. Zauważmy, że mają one łączną długość $\sum_j |d_j' - c_j'| \leqslant \delta$, a więc $\sum_j |f(d_j') - f(c_j')| \leqslant \varepsilon$ z absolutnej ciągłości. Z nierówności trójkąta otrzymujemy więc

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sum |f(d_j) - f(c_j)| + \sum |f(d_j') - f(c_j')| \leqslant \varepsilon(b - a) + \varepsilon.$$

Przejście graniczne $\varepsilon \searrow 0$ daje tezę (każdy podprzedział rozważamy analogicznie). $\square$

Twierdzenie. Następujące warunki są równoważne dla funkcji $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$:

1. $g \in AC([a,b])$,
2. istnieje funkcja $f \in L^1(a,b)$ taka, że $g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ dla $x \in [a,b]$,
3. pochodna g' istnieje p.w., $g \in L^1(a,b)$ oraz $g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)\,\mathrm{d}t$ dla $x \in [a,b]$,
4. $g \in W^{1,1}$, to znaczy $g \in L^1(a,b)$ oraz istnieje funkcja $f \in L^1(a,b)$ taka, że

$$\int_a^b g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{dla każdej funkcji } \varphi \in C_c^\infty((a,b)).$$

Dowód. Wynikanie $3 \to 2$ jest oczywiste, a $2 \to 1$ jest treścią zadania 5, więc skupimy się na $1 \to 3$. Skoro w szczególności $g \in BV$, to g' istnieje p.w. oraz $g' \in L^1$. Porównajmy funkcję g z funkcją $\overline{g}(x) = \int_a^x g'$, która również jest absolutnie ciągła. Z twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu wynika, że $\overline{g}' = g'$ p.w. Różnica $g - \overline{g}$ jest zarazem absolutnie ciągła i osobliwa, a więc stale równa $g(a)$, co dowodzi punktu 3.

Równoważność $2 \leftrightarrow 4$ jest godna uwagi, gdyż korzysta z zupełnie innych narzędzi. Implikacja $2 \to 4$ korzysta z twierdzenia Fubiniego:

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \int_a^b f(y)\varphi'(x)\mathbf{1}_{y \leqslant x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f(y)(\varphi(b) - \varphi(y))\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_a^b f(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Dla wykazania $4 \to 2$ zdefiniujmy $\overline{g}$ wzorem $\overline{g}(x) = \int_a^x f$. Wówczas różnica $g - \overline{g}$ ma zerową słabą pochodną, tzn. $\int (g - \overline{g})\varphi' = 0$ dla każdego $\varphi \in C_c^\infty$. Stąd wynika już $g - \overline{g} \equiv \text{const}$ (ćwiczenie na własności splotu), a więc punkt 2. $\square$

Zadanie 3. Pokazać implikację $1 \to 2$, stosując twierdzenie Radona-Nikodyma do miary danej przez $\mu((c,d)) = f(d) - f(c)$, a następnie implikację $2 \to 3$ przez twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu.